Sujet et corrigé de l'examen de systèmes différentiels de Mai 2014

Exercice 1 Soit $K > 0$. Donner le portrait de phase de l'équation $x'(t) = x^2(t)(1 - Kx(t))$, où $x(t) \in \mathbb{R}$. Préciser si les équilibres sont attractifs, répulsifs ou ni l'un ni l'autre.

Il y a deux équilibres : 0 et $1/K$, qui est strictement plus grand que 0. La fonction $F(x) = x^2(1-Kx)$ est strictement positive pour $x < 0$ et $0 < x < 1/K$ et strictement négative pour $x > 1/K$. Le portrait de phase indique donc que les solutions partant d'un $x_0 < 0$ croissent jusqu'à 0, que celles partant entre 0 et 1 croissent jusqu'à 1 et que celles partant au-dessus de 1 décroissent jusqu'à 1. Il suffisait de faire le dessin correspondant (long à faire à l'ordinateur, donc vous l'imaginerez...).

Exercice 2 On considère le système différentiel trivial $X'(t) = 0$, où $X(t) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les équilibres et leur stabilité (instable, stable, asymptotiquement stable).

Le système s'écrit $X'(t) = F(X(t))$ où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est la fonction nulle. Par définition, les équilibres sont les points X^* de $\mathbb{R}^2$ tels que $F(X^*) = 0$. Donc ici tous les points de $\mathbb{R}^2$ sont des équilibres. De plus, ils sont tous stables, et aucun n'est asymptotiquement stable. En effet, soit X^* un équilibre et $(J, X(\cdot))$ une solution maximale. Notons que $J = \mathbb{R}$ et $X(t) = X(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Stabilité : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $||X(0) - X^*|| < \alpha$ alors pour tout $t \geq 0$, $||X(t) - X^*|| < \varepsilon$. Il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon$. Donc X^* est stable.

Absence de stabilité asymptotique : soit $\varepsilon > 0$. Il existe $X_0 \neq X^*$ tel que $||X_0 - X^*|| < \varepsilon$. Si $X(0) = X_0$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $||X(t) - X^*|| = ||X_0 - X^*|| \neq 0$. En particulier, on n'a pas $||X(t) - X^*|| \to 0$. Donc X^* n'est pas attractif, et donc pas asymptotiquement stable.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Résoudre explicitement le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ et donner l'allure du portrait de phase.

A comprendre : nous avons vu plusieurs manières de résoudre un système différentiel linéaire, notamment : a) via l'exponentielle de matrice ; b) via une base de vecteurs propres de A. Comme on aurait a priori besoin de calculer les vecteurs propres pour calculer l'exponentielle de la matrice A, autant utiliser la méthode b). De plus, celle-ci nous donne directement les directions propres du mouvement, c'est à dire les axes du portrait de phase. Elle est donc ici doublement préférable.

Correction : on cherche les valeurs propres de A via le polynôme caractéristique, puis les vecteurs propres associés via le noyau de $A - \lambda I$ où λ est la valeur propre concernée. On trouve qu'il y a deux valeurs propres : $\lambda_1 = -1/2$ et $\lambda_2 = 1/2$, de vecteurs propres associés

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La solution générale de l'équation est $X(t) = \mu_1 e^{-t/2} X_1 + \mu_2 e^{t/2} X_2$, avec $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$.

Le portrait de phase fait apparaître que $(0, 0)$ est un point selle, que les directions propres du mouvement (les axes du portrait de phase) sont les droites de direction X_1 et X_2 (ces directions sont orthogonales : les axes du portrait de phase sont obtenus en tournant les axes de la base canonique de 45 degré), et que les solutions s'approchent de $(0, 0)$ dans la direction de X_1 et s'en éloigne dans la direction de X_2. Les trajectoires hors des axes sont des hyperboles (dans la base de vecteurs propres).

Problème. *On pourra utiliser les résultats des exercices 1, 2, 3.*

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (x[x - x^2 - y^2], y[y - x^2 - y^2])$. Soit (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$. On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[x(t) - x^2(t) - y^2(t)] \\ y'(t) = y(t)[y(t) - y^2(t) - x^2(t)] \end{cases} \qquad (S)$$

Partie 1 : propriétés générales.

1) Montrer qu'il existe une unique solution maximale de (S) telle que $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Dans toute la suite, on la notera $(J, (\bar{x}, \bar{y}))$.

Ce problème de Cauchy s'écrit $X'(t) = F(X(t))$, $X(0) = X_0$ avec $X_0 = (x_0, y_0)$. Or la fonction F est C^∞ donc C^1. Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème a une unique solution maximale.

2) Pour tout $t \in J$, on pose $g(t) = \bar{x}^2(t) + \bar{y}^2(t)$. On admet que

$$g'(t) = 2\bar{x}^2[\bar{x}(t) - \bar{x}^2(t) - \bar{y}^2(t)] + 2\bar{y}^2(t)[\bar{y}(t) - \bar{x}^2(t) - \bar{y}^2(t)].$$

2a) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $a^2 + b^2 \geq 1$, alors $a^2 + b^2 \geq a$.

Supposons $a^2 + b^2 \geq 1$. Si $a \geq 1$ alors $a^2 + b^2 \geq a^2 \geq a$. Si $a < 1$, alors $a^2 + b^2 \geq 1 > a$. Donc dans tous les cas $a^2 + b^2 \geq a$.

2b) En déduire que si $g(t) \geq 1$ alors $g'(t) \leq 0$, puis que $\sup J = +\infty$.

Si $g(t) = \bar{x}^2(t) + \bar{y}^2(t) \geq 1$ alors en utilisant le 2a) avec $a = x(t)$ et $b = y(t)$, on montre que $\bar{x}(t) - \bar{x}^2(t) - \bar{y}^2(t) \leq 0$ et donc $\bar{x}^2[\bar{x}(t) - \bar{x}^2(t) - \bar{y}^2(t)] \leq 0$. De même, $\bar{y}^2[\bar{y}(t) - \bar{x}^2(t) - \bar{y}^2(t)] \leq 0$ et donc $g'(t) \leq 0$.

Ceci étant vu, supposons par l'absurde $\sup J < +\infty$. Alors, par l'alternative d'explosion, $g(t) \to +\infty$ quand $t \to \sup J$. Donc il existe $t_0 \in]0, \sup J[$ tel que pour tout $t \in]t_0, \sup J[$, $g(t) \geq 1$ donc $g'(t) \leq 0$. Donc sur $]t_0, \sup J[$, $g(t) \leq g(t_0)$, ce qui contredit le fait que $g(t) \to +\infty$ quand $t \to \sup J$. Donc $\sup J = +\infty$.

Partie 2 : équilibres.

3) Montrer que (S) a 4 équilibres : $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1/2, 1/2)$.

Les équilibres sont les éléments (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $F(x, y) = 0$, c'est à dire :

$$\begin{cases} x[x - x^2 - y^2] = 0 \\ y[y - y^2 - x^2] = 0 \end{cases}$$

Si $x = 0$ alors $F(x, y) = 0$ si et seulement si $y - y^2 = 0$, c'est à dire $y = 0$ ou $y = 1$. Il y a donc deux équilibres tels que $x = 0$: $(0, 0)$ et $(0, 1)$. De même, il y a deux équilibres tels que $y = 0$: $(0, 0)$ - déjà trouvé - et $(1, 0)$. Enfin, si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $F(x, y) = 0$ si et seulement si $x - x^2 - y^2 = 0$ et $y - y^2 - x^2 = 0$, ce qui est équivalent (soustraire une ligne à l'autre) à $x = y$ et $y - 2y^2 = 0$. Comme $y \neq 0$, la dernière équation est équivalente à $y = 1/2$. Il y a donc un unique équilibre tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$: $(1/2, 1/2)$. On a bien trouvé qu'il y a exactement 4 équilibres, ceux annoncés.

4) Pour chaque équilibre X^* de (S), déterminer la stabilité de l'origine pour le système linéarisé en X^* et dire ce qu'on peut en déduire sur la stabilité de X^* pour le système (S).

La matrice jacobienne de F en un point (x, y) quelconque est :

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 3x^2 - y^2 & -2xy \\ -2xy & 2y - 3y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

Equilibre $(0,0)$: On a $DF(0,0) = 0$ (le système linéarisé en $(0,0)$ est donc : $X'(t) = 0$). D'après l'exercice 2, $(0,0)$ est stable mais pas asymptotiquement stable pour ce système linéarisé. On ne peut rien en déduire sur la stabilité de $(0,0)$ pour le système initial, car cet équilibre n'est pas hyperbolique ($DF(0,0)$ a une valeur propre nulle, et donc a fortiori de partie réelle nulle).

Equilibres $(0,1)$ et $(1,0)$. On a : $DF(0,1) = DF(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

-1 est valeur propre double. Toutes les valeurs propres ont donc une partie réelle strictement négative. Donc $(0,0)$ est asymptotiquement stable pour le système linéarisé. De plus, $(1,0)$ et $(0,1)$ sont des équilibres hyperboliques, donc $(1,0)$ et $(0,1)$ sont asymptotiquement stables pour le système initial.

Equilibres $(1/2, 1/2)$. On a : $DF(1/2, 1/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

D'après l'exercice 3, $(0,0)$ est instable pour le système linéarisé, et les valeurs propres sont $1/2$ et $-1/2$, donc $(1/2, 1/2)$ est un équilibre hyperbolique. Donc $(1/2, 1/2)$ est un équilibre instable du système initial.

Partie 3 : propriétés de quelques solutions.

Rappelons qu'on note $(J, (\bar{x}, \bar{y}))$ l'unique solution de (S) telle que $\bar{x}(0) = x_0$ et $\bar{y}(0) = y_0$.

5) Montrer que $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont des fonctions de signe constant.

Soit la fonction $a : J \to \mathbb{R}$ définie par $a(t) = \bar{x}(t) - \bar{x}^2(t) - \bar{y}^2(t)$ et la fonction $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t,x) = a(t)x$. La fonction F (définissant le système (S)) est C^∞, donc $\bar{x}$ et $\bar{y}$ le sont aussi, donc $a(\cdot)$ et f sont C^∞. En particulier, f est C^1. Or $(J, \bar{x})$ et $(J, t \to 0)$ sont deux solutions de l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$. Donc par un corollaire du théorème de Cauchy-Lipschitz, $\bar{x}$ est une fonction de signe constant. Un raisonnement similaire montre que $\bar{y}$ est également de signe constant.

6) On suppose $x_0 < 0$ et $y_0 < 0$. Montrer que les fonctions $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont croissantes. En déduire que $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \to (0,0)$ quand $t \to +\infty$.

Soit $t \in J$. On a : $\bar{x}'(t) = \bar{x}(t)[\bar{x}(t) - \bar{x}^2(t) - \bar{y}^2(t)]$. Puisque $x_0 < 0$, d'après la question 5), $\bar{x}(t) < 0$, et le terme entre crochet est a fortiori strictement négatif. Comme produit de deux terme strictement négatifs, $\bar{x}'(t) > 0$, et de même, $\bar{y}'(t) > 0$. Donc $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont croissantes. De plus, elles sont majorées par 0, donc elles convergent. Soit (x^*, y^*) la limite de $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ en $\sup J = +\infty$. Comme l'équation est autonome, (x^*, y^*) est un équilibre. Mais comme $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont négatives, $x^* \leq 0$ et $y^* \leq 0$. Le seul équilibre qui convienne est donc $(0,0)$. Donc $(x^*, y^*) = (0,0)$.

7) Que peut-on dire du comportement de la solution quand $t \to +\infty$ si $x_0 > 0$ et $y_0 = 0$?

Si $\bar{y}(t) = 0$, alors d'après 5), $\bar{y}(t) = 0$ pour tout $t \in J$, et donc $(J, \bar{x})$ est solution de $x'(t) = x(t)(x(t) - x^2(t)) = x^2(t)(1 - x(t))$. Notons de plus que $(J, \bar{x})$ est une solution maximale de cette équation, car si on pouvait la prolonger, on pourrait également prolonger la solution $(J, (\bar{x}, \bar{y}))$ en tant que solution de (S). L'exercice 1 avec $K = 1$ indique donc que si $x_0 > 0$ et $y_0 = 0$, alors $\bar{x}(t) \to 1$ quand $t \to +\infty$.

8) On suppose $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. Soit (J_u, u) la solution maximale de $u'(t) = u^2(t)(1 - u(t))$ telle que $u(0) = x_0$. En comparant $\bar{x}$ et u, montrer que $\limsup_{t \to +\infty} \bar{x}(t) \leq 1$.

Comme $x_0 > 0$, $\bar{x}(t) > 0$ sur J, donc pour tout $t \in J$, $\bar{x}'(t) = \bar{x}(t)[\bar{x}(t) - \bar{x}^2(t) - \bar{y}^2(t)] \leq \bar{x}(t)[\bar{x}(t) - \bar{x}^2(t)] = \bar{x}^2(t)(1 - \bar{x}(t))$. Comme de plus $u(0) = \bar{x}(0)$, d'après le principe de comparaison,

$\bar{x}(t) \leq u(t)$ pour tout $t \in [0, +\infty[\cap J \cap J_u$. Or d'après l'exercice 1 et la question 2b, $[0, +\infty[\subset J \cap J_u$, donc $\bar{x}(t) \leq u(t)$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. De plus, comme $u(0) > 0$, d'après l'exercice 1, $u(t) \to 1$ quand $t \to +\infty$. Donc par passage à la limite supérieure : $\limsup_{t \to +\infty} \bar{x}(t) \leq \limsup_{t \to +\infty} u(t) = \lim_{t \to +\infty} u(t) = 1$.

Remarque : contrairement à la limite supérieure, l'existence de la limite de $\bar{x}(t)$ n'est a priori pas garantie, on ne peut donc pas comparer les limites, seulement les limites supérieures (ou inférieures, mais ce n'est pas la question ici).

9) Soit (J_v, v) la solution maximale de $v'(t) = v^2(t)(1 - 2v(t))$ telle que $v(0) = x_0$.

9a) Montrer que $(J_v, (v, v))$ est une solution maximale de (S).

Posons $x(t) = y(t) = v(t)$, si bien que $(J_v, (v, v)) = (J_v, (x, y))$. Pour tout $t \in J_v$, $x'(t) = v'(t) = v^2(t)(1 - 2v(t)) = v(t)[v(t) - v^2(t) - v^2(t)] = x(t)[x(t) - x^2(t) - y^2(t)]$ et de même $y'(t) = y(t)[y(t) - x^2(t) - y^2(t)]$. Donc $(J_v, (v, v))$ est une solution de (S). Elle est maximale, car si on pouvait la prolonger, cela impliquerait qu'on pourrait prolonger v en une fonction continue définie sur un intervalle plus grand que J_v. C'est impossible car v est une solution maximale de $v'(t) = v^2(t)(1-2v(t))$. De ce fait, par l'alternative d'explosion, $\sup J_v = +\infty$ ou $|v(t)| \to +\infty$ quand $t \to \sup J_v$. Dans les deux cas, on ne peut pas prolonger v par continuité en $\sup J_v$. De même, $\inf J_v = -\infty$ ou $|v(t)| \to +\infty$ quand $t \to \inf J_v$. On ne peut donc pas prolonger v par continuité en $\inf J_v$.

9b) En déduire que si $x_0 = y_0$, alors pour tout $t \in J$, $\bar{x}(t) = \bar{y}(t)$, et que si $x_0 = y_0 > 0$, alors $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \to (1/2, 1/2)$ quand $t \to +\infty$.

D'après 9a), $(J_v, (v, v))$ est une solution maximale de (S), et si $x_0 = y_0$, elle vaut (x_0, y_0) en 0. D'après l'unicité dans la question 1, on a donc $(J_v, (v, v)) = (J, (\bar{x}, \bar{y})$. En particulier, pour tout t dans J, $\bar{x}(t) = v(t) = \bar{y}(t)$. Si de plus $v(0) > 0$, alors d'après l'exercice 1 avec $K = 2$, $v(t) \to 1/2$ donc $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \to (1/2, 1/2)$ quand $t \to +\infty$.

10) Soit $W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $W(x, y) = (x + y - 1)^2$. Soit $w : J \to \mathbb{R}$ telle que $w(t) = W(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$. On admet que $w'(t) = -2w(t)(\bar{x}^2(t) + \bar{y}^2(t))$. En déduire que tout point d'accumulation (x^*, y^*) de $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ différent de $(0, 0)$ vérifie $x^* + y^* = 1$.

La fonction W est partout positive, donc pour tout t dans J, $w(t) \geq 0$, donc $w'(t) \leq 0$ d'après la formule admise. Il s'ensuit que W est une fonction de Lyapunov pour le système (S). Donc tout point d'accumulation (x^*, y^*) de $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ vérifie $\dot{W}(x^*, y^*) = 0$, où $\dot{W} = \nabla W \cdot F$. Or d'après la formule pour $w(t)$, on a $\dot{W}(x, y) = -2W(x, y)(x^2 + y^2)$, donc $\dot{W}(x, y) = 0 \Leftrightarrow [W(x, y) = 0$ ou $x^2 + y^2 = 0] \Leftrightarrow [W(x, y) = 0$ ou $(x, y) = (0, 0)]$. Donc tout point d'accumulation (x^*, y^*) différent de $(0, 0)$ vérifie $W(x^*, y^*) = 0$, c'est à dire $(x^* + y^* - 1)^2$, donc $x^* + y^* = 1$.